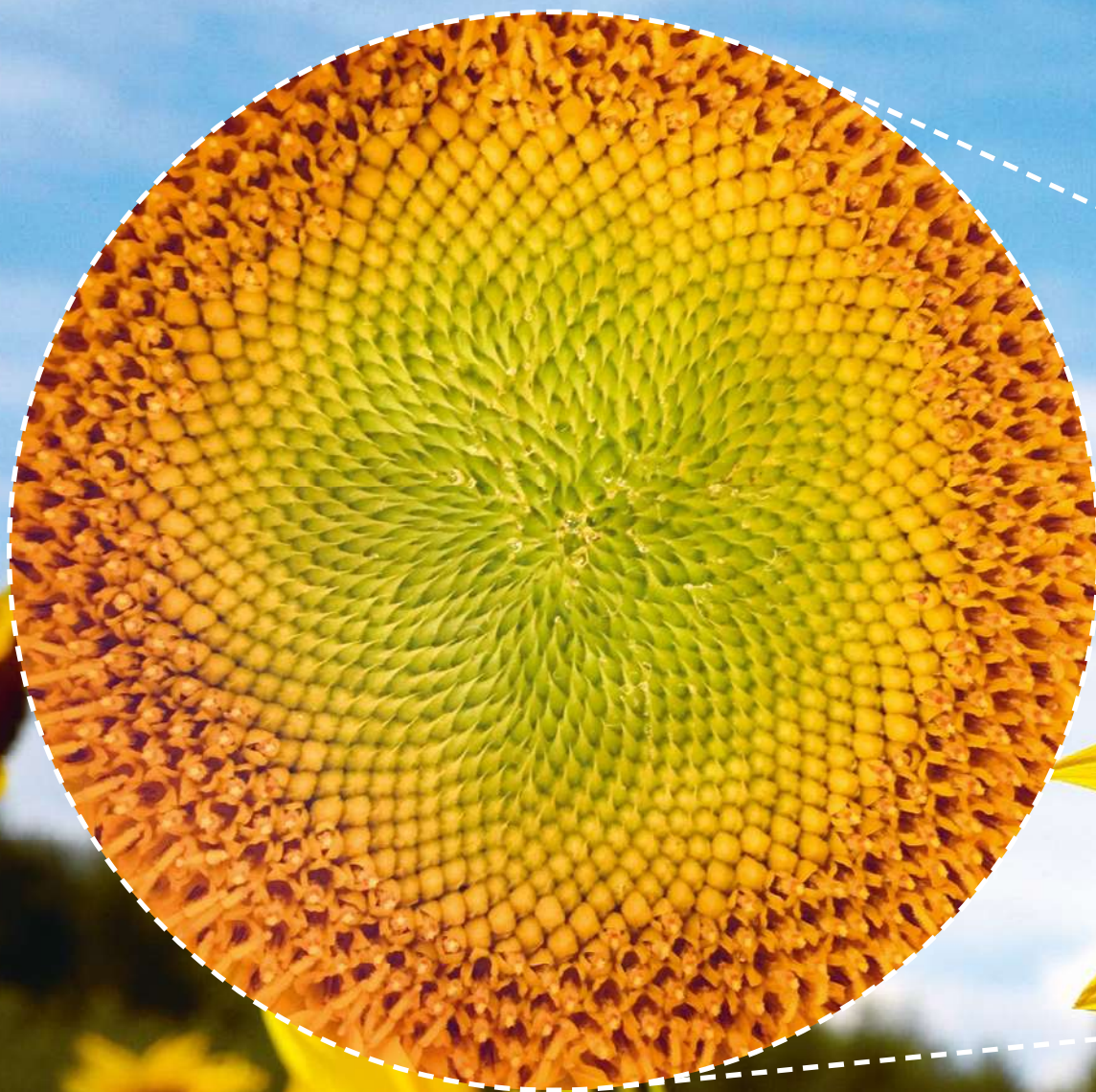




1 Números

En esta Unidad aprenderás sobre el conjunto de los números reales. Además, aprenderás sobre los logaritmos y sus propiedades.

1. Los patrones espirales del girasol en la imagen corresponden a 55 antihorarios y 34 en sentido horario. ¿Qué número se obtiene al dividir $55 : 34$?
2. ¿Consideras que el resultado anterior es cercano al número φ ? Comenta con tu curso.

Para saber más.

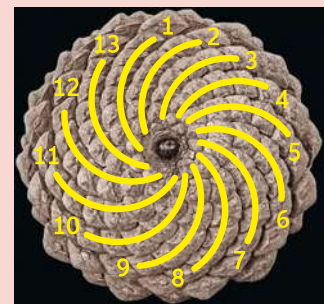
gbit.cl/T21M2MP007A



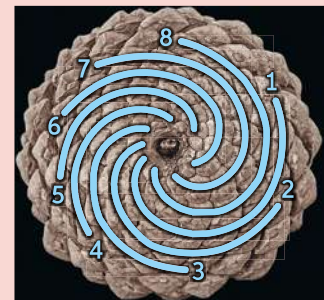
El número de oro, denotado por la letra griega φ (phi o fi), es un número equivalente al resultado de $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, es decir 1,61803...

La sucesión de Fibonacci es un patrón de números fuertemente vinculado con el número de oro. Para formarla, se comienza con los números 1 y 1, el siguiente número, el 2, se forma a partir de los dos primeros ($1 + 1$), luego el 3 es ($2 + 1$), 5 es ($3 + 2$). Si continuas, obtendrás la sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 y así sucesivamente.

El mundo natural está repleto de matemáticas, incluso las semillas y los conos de pino se encuentran organizadas en patrones espirales. Por ejemplo, si contamos en sentido de las agujas del reloj los patrones:



Y luego en contra de las agujas del reloj:



Corresponden a dos números seguidos de la sucesión de Fibonacci, cuya división

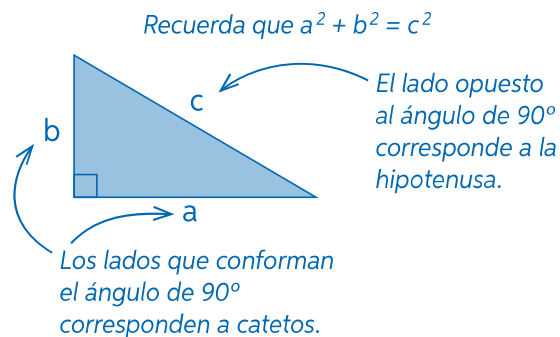
$$\frac{13}{8} = 1,625 \text{ se acerca a } \varphi.$$

3. ¿Por qué crees que phi no pertenece al conjunto de los números racionales?, ¿qué característica debería tener para que así fuera?
4. Investiga la relación del número φ con el arte, la arquitectura y el cuerpo humano.

- Resuelve las ecuaciones y determina el o los conjuntos numéricos al que pertenece(n) la solución.
 - $x + 2 = 5$
 - $5x - 12 = -7$
 - $22 + 5x = -3$
- Clasifica los números en decimal finito, infinito periódico o semiperiódico.
 - 0,12
 - $2,\overline{5}$
 - $\frac{7}{30}$
 - $5,\overline{797}$
 - $\frac{14}{20}$
 - 4,622
 - $15,\overline{15}$
 - $\frac{24}{18}$
 - $\frac{99}{8}$
- Expresa cada número decimal como fracción irreducible.
 - 8,2
 - $1,\overline{3}$
 - $5,0\overline{24}$
- Una torre tiene hasta los $\frac{3}{8}$ de su capacidad. Si se agregan 1 600 L de agua, se llena. ¿Qué capacidad tiene la torre?
- Resuelve las operaciones.
 - $1 + \frac{1}{3} - 0,\overline{3}$
 - $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} : \frac{1}{2} - \frac{7}{15}$
- Evalúa si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.
 - Todo número elevado a cero es igual a 1.
 - Si la base de una potencia es menor que cero y su exponente es par, el resultado es positivo.
- Resuelve las multiplicaciones utilizando productos notables.
 - $(x + 9)(x + 9)$
 - $(3x^2 - 7)(3x^2 + 1)$

- Aplica las propiedades de las potencias para resolver. Expresa el resultado final como potencia de exponente positivo.
 - $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \frac{1,5^{-4}}{0,25^2}$
 - $\left[\left(\frac{3}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{2}{3}\right)^8\right]^{-3}$
 - $\frac{12^{-3} \cdot (9^8)^{-2} \cdot 12^{-1}}{(9^4 \cdot 9^6)^8}$

- Resuelve los siguientes problemas utilizando el teorema de Pitágoras.



- Un cateto de un triángulo rectángulo mide 24 cm y la hipotenusa, 40 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?
 - Se afirma que un triángulo de lados 5, 7 y 35 cm es rectángulo ya que:
 $5^2 + 7^2 \rightarrow (7 \cdot 5)^2 \rightarrow 35^2$
 ¿Cuál fue el error cometido?
- Aproxima a la décima los siguientes números mediante el método de redondeo.
 - $3,\overline{051}$
 - $-3,\overline{57}$
 - Aproxima a la centésima los siguientes números mediante el método de truncamiento.
 - $9,\overline{915}$
 - $-0,\overline{891}$

Reflexiono

- ¿Lograste realizar todas las actividades sin problemas? ¿Cuáles te resultaron más difíciles?
- ¿Hay algún contenido que debas reforzar? ¿Cómo lo harás?

El conjunto de los irracionales ($\mathbb{Q}^*$)

¿Cuál es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 3 cm y 4 cm? ¿Qué procedimiento usarías para determinarla?

Objetivo: Conocer el conjunto de los números reales.

1. ♦ En parejas, realicen la siguiente actividad utilizando una regla y calculadora científica.
 - a. Construyan en su cuaderno un cuadrado cuyo lado mida 1 cm. Tracen la diagonal y mídanla con una regla. ¿Cuál es su valor? Anótenlo.
 - b. Apliquen el teorema de Pitágoras para calcular la diagonal del cuadrado. Luego, ingresen este número a la calculadora. ¿Cuántos decimales obtuvieron? ¿A qué tipo de decimal corresponde?
 - c. ¿Por qué el número obtenido no pertenece al conjunto de los números racionales? Expliquen y compartan sus respuestas con sus compañeros de curso.

- Existen números que tienen infinitas cifras decimales sin períodos. Este tipo de números, como $\sqrt{2}$, son denominados números irracionales.

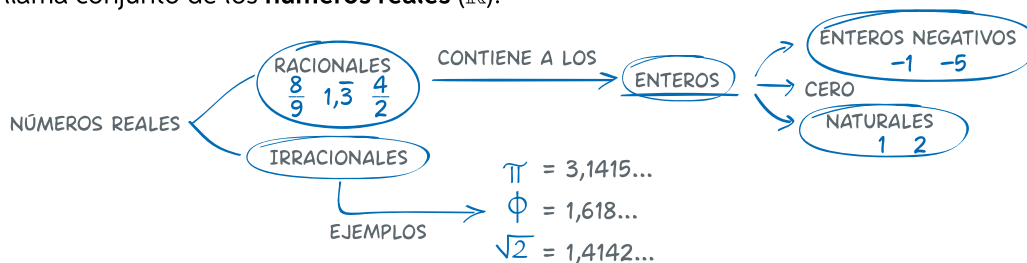
El conjunto de los **números irracionales** se simboliza por $\mathbb{Q}^*$, y está formado por todos los números que no se pueden representar como un número racional, ya que su parte decimal es infinita no periódica, es decir, no se pueden escribir de la forma $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$.

Algunos números irracionales son:

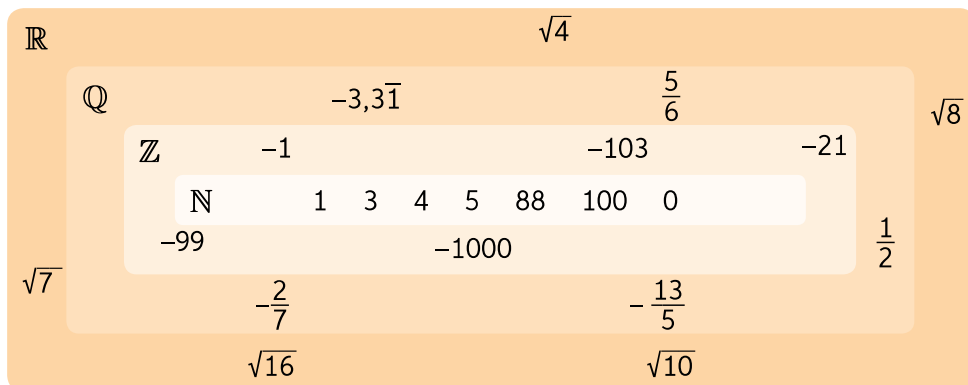
$$\sqrt{2} = 1,414213562373...$$

$$\pi = 3,14159265358979...$$

El conjunto que contiene tanto a los números racionales como a los irracionales se llama conjunto de los **números reales** ($\mathbb{R}$).



2. Analiza el siguiente esquema de conjuntos de números reales. Luego, responde.



- Analiza los elementos que se anotaron en cada conjunto. ¿Se encuentran todos bien anotados?
 - ¿Cuál es el error que se cometió al realizar el esquema anterior? Compara tu respuesta en parejas.
 - Comenta con tu curso: ¿Qué precaución tendrías al construir un diagrama similar?
3. Clasifica los siguientes números en racionales ($\mathbb{Q}$) o irracionales ($\mathbb{Q}^*$).
- | | | | |
|----------|------------------|--------------------|-----------------|
| a. -18 | c. $\sqrt{3}$ | e. $-\frac{21}{3}$ | g. $2,0\bar{8}$ |
| b. 0 | d. $-0,5\bar{7}$ | f. $\sqrt{36}$ | h. $1,\bar{9}$ |
4. Escribe:
- Cinco números racionales.
 - Cinco números irracionales.
 - Cinco números reales.
 - Cinco números enteros que no sean números naturales.
5. ♦ Determina si cada afirmación es verdadera o falsa. Justifica las falsas con un contraejemplo.
- Todo número decimal infinito periódico es racional.
 - El 0 es un número racional e irracional.
 - Todo número entero es un número racional.
 - Existen números reales que no son racionales ni irracionales.

Para concluir

- ¿Qué diferencia(s) hay entre los números irracionales y los racionales? Explica.
- ♦ Utiliza la calculadora y determina el valor de cada raíz cuadrada. Para ello, considera 3 cifras decimales: $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$. ¿Qué resultados son números enteros? En el caso de los números primos, ¿sus raíces cuadradas son números irracionales? ¿Por qué crees que ocurre esto?



Calcular en $\mathbb{R}$

¿Pertencen todas las raíces cuadradas al conjunto de los números irracionales? ¿por qué?

¿Qué características tienen las raíces cuadradas exactas?

Objetivo: Calcular operaciones con números reales.

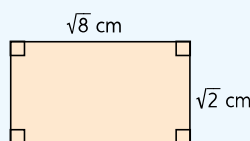
1. Marta participó de un torneo matemático, donde se le planteó el siguiente desafío:



¿Cuál es el área del rectángulo?

Ella respondió correctamente, realizando el siguiente desarrollo:

$$\text{Área} = \text{largo} \cdot \text{ancho} = \sqrt{8} \text{ cm} \cdot \sqrt{2} \text{ cm} = \sqrt{16} \text{ cm}^2 \rightarrow 4 \text{ cm}^2$$



- a. Explica el procedimiento que utilizó Marta para calcular el área del rectángulo.
- b. ¿Cómo comprobarías el resultado de Marta? Comenta con tus compañeros
2. Explica el procedimiento que realizó correctamente Marta en un siguiente desafío, para calcular la razón entre el ancho y el largo del rectángulo anterior.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{La razón entre el ancho y largo es } 1 : 2, \text{ o bien, el ancho es la mitad del largo.}$$

- Para multiplicar y dividir raíces con igual índice, se multiplican o dividen las cantidades subradicales y se conserva el índice.

$$\bullet \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Ejemplos: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$
 $2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{8} = (2 \cdot 3) \sqrt{7 \cdot 8} = 6\sqrt{56}$

$$\bullet \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}, \text{ con } b \neq 0$$

Por ejemplo: $\sqrt{6} : \sqrt{3} = \sqrt{6 : 3} = \sqrt{2}$

Recuerda que:

$$\begin{array}{c} \text{Índice radical} \\ \downarrow \\ \sqrt[2]{49} = 7 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{Cantidad subradical} \quad \text{Raíz} \end{array}$$

3. Resuelve las siguientes operaciones.

a. $\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2}$

b. $6\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{18}$

c. $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{b}$

d. $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$

e. $(3\sqrt{7} + 2\sqrt{2})(3\sqrt{7} - 2\sqrt{2})$

f. $5\left(\frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{3}}\right)$

g. $\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$

h. $\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5}\right)^2$

4. ♦ Analiza el siguiente procedimiento de descomposición de raíces.

Paso 1: Busca un producto entre dos números donde al menos uno de los factores tenga raíz cuadrada exacta.

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Paso 2: Separa en una multiplicación de raíces, resolviendo la que tiene solución exacta.

Paso 3: Expresa la multiplicación entre el número racional y la raíz.

- ¿Por qué se eligió 4 y 3 para descomponer la raíz de 12?
- ¿Qué hubiera ocurrido si se hubiera descompuesto la raíz de 12 en 6 y 2? ¿se hubiera podido descomponer la raíz?

5. Descompón las siguientes raíces.

a. $\sqrt{20}$

c. $\sqrt{45}$

e. $\sqrt{80}$

g. $\sqrt{200}$

b. $\sqrt{18}$

d. $\sqrt{32}$

f. $\sqrt{108}$

h. $\sqrt{147}$

Para resolver **adiciones y sustracciones** con raíces cuadradas, puedes utilizar un procedimiento similar al que se usa para reducir términos semejantes, o sea, agrupar. Para agrupar las raíces cuadradas, estas deben tener igual cantidad subradical, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} - 4\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 5\sqrt{3} &= 3\sqrt{5} - 4\sqrt{3} \\ \sqrt{12} - \sqrt{2} - \sqrt{3} &= 2\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

6. Resuelve.

a. $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

c. $6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - 8\sqrt{5}$

e. $4\sqrt{6} - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

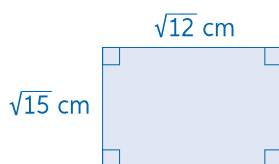
b. $5\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

d. $-2,3\sqrt{2} + \frac{3}{5}\sqrt{2} + \sqrt{2} - 0,8\sqrt{2}$

f. $7\sqrt{5} - 4\sqrt{20} + 3\sqrt{125}$

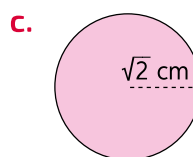
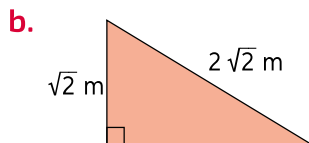
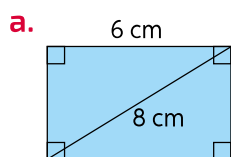
GEOMETRÍA

7. ♦ Calcula el área de cada figura. Luego, simplifica las raíces cuando sea posible. Compara el resultado con tu compañero.



El área del rectángulo corresponde a:
área = base · altura

$$\begin{aligned} &= \sqrt{12} \cdot \sqrt{15} \\ &= \sqrt{5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3} \\ &= 6\sqrt{5} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



La operatoria de números reales cumple con las siguientes propiedades:

- El opuesto de un irracional es irracional.
Ejemplo: $\pi \in \mathbb{Q}^*$, por lo que $-\pi \in \mathbb{Q}^*$.
- El inverso multiplicativo de un irracional es irracional.
Ejemplo: $\frac{1}{\pi}$ es el inverso de π , por lo que $\frac{1}{\pi} \in \mathbb{Q}^*$.
- La adición o sustracción entre un racional y un irracional es irracional.
Ejemplo: $3 + \pi \in \mathbb{Q}^*$.
- El producto entre un racional distinto de cero y un irracional es irracional.
Ejemplo: $5 \cdot \pi = 5\pi$ es irracional.
- El resultado del producto entre dos irracionales puede ser un racional o un irracional.

$$\begin{aligned} \text{Ejemplo: } \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} &= 2 \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} &= \sqrt{6} \in \mathbb{Q}^* \end{aligned}$$

Para la adición

$$\begin{aligned} a + b &\in \mathbb{R} \text{ (Clausura)} \\ a + b &= b + a \text{ (Conmutatividad)} \\ (a + b) + c &= a + (b + c) \text{ (Asociatividad)} \\ a + 0 &= a \text{ (Elemento neutro)} \\ a + (-a) &= 0 \text{ (Elemento inverso)} \end{aligned}$$

Para el producto

$$\begin{aligned} a \cdot b &\in \mathbb{R} \text{ (Clausura)} \\ a \cdot b &= b \cdot a \text{ (Conmutatividad)} \\ (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \text{ (Asociatividad)} \\ a \cdot 1 &= a \text{ (Elemento neutro)} \\ a \cdot a^{-1} &= 1 \text{ (Elemento inverso, } a \neq 0) \end{aligned}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(Distributividad del producto sobre la suma)

8. Determina si los siguientes números son racionales o irracionales.

a. $1 + \sqrt{16}$

b. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$

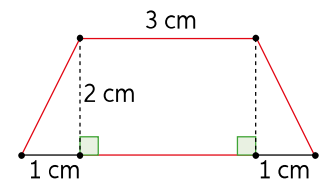
c. $\sqrt{50} \cdot \sqrt{3,4}$

9. ♦ Verifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica con un ejemplo en cada caso.

- a. El producto de dos números irracionales siempre es un número irracional.
- b. Todos los números irracionales son números reales.
- c. Todo número real es un número racional.
- d. Todos los números irracionales son raíces cuadradas no exactas
- e. Al restar números irracionales, el resultado es un número irracional.

ACTIVIDADES DE PROFUNDIZACIÓN

10. Determina el perímetro y el área del siguiente trapecio isósceles. Luego, identifica si los resultados anteriores corresponden a números racionales o irracionales.



Para concluir

- a. ♦ Escribe dos números tales que uno sea racional, el otro irracional y su producto sea racional.
- b. ♦ Se quiere construir un cuadrado con área igual a la de un círculo de radio 1 cm. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado? ¿corresponde a un número racional o irracional?



5 a 7

Aproximación de números irracionales

Objetivo: Aproximar números irracionales.

¿Qué estrategias de aproximación estudiaste en cursos anteriores?

¿En qué situaciones de la vida cotidiana has realizado aproximaciones de números?

No se puede obtener una representación decimal exacta de un número irracional. Por tanto, aproximar un número irracional es representar su valor a través de un resultado lo suficientemente cercano.

- Si al aproximar un número irracional, el valor que se obtiene es menor, entonces se ha aproximado por **defecto**. En cambio, si es mayor, se ha aproximado por **exceso**.

Ejemplo:

Al aproximar $\pi = 3,14159\dots$ a la centésima, se tiene lo siguiente:

$3,14159\dots$

Por defecto	Por exceso
3,14	3,15

- Una aproximación se puede hacer por redondeo o por truncamiento a una determinada cifra decimal.

Redondeo: Se considera la cifra siguiente a la cual se quiere aproximar el número. Si esta es mayor o igual a 5, se suma 1 a la cifra anterior. Si esta es menor que 5, entonces la cifra se mantiene igual.

Truncamiento: se escribe un número hasta una determinada cifra decimal.

Ejemplo:

Al aproximar $e = 2,7182818284\dots$ a la milésima, se tiene que:

$e = 2,7182818284$

$2 < 5$

Por redondeo	Por truncamiento
2,718	2,718

- Aproxima a la centésima los siguientes números irracionales según lo que se indica a continuación:

Por exceso

Por defecto

Por redondeo

a. $\sqrt{3} = 1,732050808\dots$ b. $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$ c. $\pi = 3,14159\dots$

- Utiliza una calculadora para determinar una aproximación de las siguientes raíces redondeadas a la milésima.

a. $\sqrt{5}$

c. $\sqrt{13}$

e. $\sqrt{24}$

b. $\sqrt{11}$

d. $\sqrt{19}$

f. $\sqrt{37}$

3. Escribe en cada caso una aproximación (dos decimales) por truncamiento y por redondeo de las siguientes operaciones. Usa calculadora.

a. $2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

e. $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$

b. $\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + \sqrt{10}$

f. $\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

c. $\sqrt{2} - \sqrt{8} + 2\sqrt{18}$

g. $-2,1\sqrt{5} + \frac{1}{3}\sqrt{5} - \sqrt{5} + 0,1\sqrt{5}$

d. $\sqrt{7} - 2\sqrt{5} + 10\sqrt{3}$

h. $\frac{2}{3}\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 2\sqrt{8}$

El error que se obtiene al hacer una aproximación de un número irracional se calcula determinando la diferencia en valor absoluto entre el número irracional y su aproximación.

Por ejemplo, el error al aproximar por redondeo a la centésima el número irracional ϕ :

$$\phi = 1,6180339\dots \quad 8 \geq 5$$

Por redondeo se tiene: 1,62 y el error de aproximación es:

$$|1,6180339\dots - 1,62| = |-0,0019661\dots| = 0,0019661\dots \approx 0,00196$$

El error de aproximación es cercano a 0,00196.

4. Aproxima por redondeo a la centésima los siguientes números irracionales. Luego, determina el error de aproximación.

a. $\sqrt{2}$

b. $\sqrt{5}$

c. $\sqrt{8}$

d. $\sqrt{11}$

e. $\sqrt{18}$

f. $\sqrt{21}$

g. $\sqrt{26}$

h. $\sqrt{30}$



Hípaso de Metaponto (siglos V-VI a.C.) fue un filósofo y matemático de la escuela pitagórica, pero fue expulsado de ella por probar la irracionalidad de $\sqrt{2}$, hecho que atentaba contra la creencia de que el universo podía ser explicado mediante el uso de números naturales y racionales.

5. En una calculadora, el valor de $\sqrt{5} = 2,236067977\dots$ y $\sqrt{7} = 2,645751311\dots$ y de $\sqrt{5} + \sqrt{7} = 4,881819289\dots$. A partir de esta información realiza lo siguiente.

- a. Redondea los valores de las raíces a tres cifras decimales y súmalos; luego calcula el error de tu resultado respecto del que entrega la calculadora.
- b. Repite el proceso anterior, pero ahora redondeando los números a dos cifras decimales.

Para concluir

¿Qué diferencias y similitudes observas en la aproximación de números irracionales, comparados con la de los números racionales?



8

Orden y ubicación de números reales en la recta numérica

Objetivo: Ordenar y ubicar números irracionales en la recta numérica.

¿Qué recuerdas del teorema de Pitágoras?

¿Cómo ubicarías una raíz cuadrada en la recta numérica?

Para comparar números reales, y en particular, números irracionales, estos se pueden representar en forma decimal, tal como se hace con los números racionales.

Ejemplo: Ordena de menor a mayor los números $\sqrt{6}$; 2,45; $\frac{5}{2}$ y 2,42.

Usando la calculadora, obtenemos que $\sqrt{6} = 2,449\dots$ y $\frac{5}{2} = 2,5$. Luego, el orden es:

$$2,42 < \sqrt{6} < 2,45 < \frac{5}{2}$$

Otra forma de ordenar números si hay raíces cuadradas, se considera que mientras mayor sea un número, mayor es su expresión al cuadrado.

Ejemplo: Ordena de menor a mayor los números $2\sqrt{5}$; 4,3; $\sqrt{19}$ y $3\sqrt{2}$.

Elevamos todos los números al cuadrado:

$$(2\sqrt{5})^2 = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 4 \cdot 5 = 20$$

$$(4,3)^2 = 4,3 \cdot 4,3 = 18,49$$

$$(\sqrt{19})^2 = \sqrt{19} \cdot \sqrt{19} = 19$$

$$(3\sqrt{2})^2 = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 9 \cdot 2 = 18$$

Luego ordenamos de menor a mayor: $3\sqrt{2} < 4,3 < \sqrt{19} < 2\sqrt{5}$

1. Ordena de menor a mayor los siguientes números. Guíate por el ejemplo anterior.

a. $\sqrt{35}$; 4,6; $4\sqrt{3}$

c. $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{39}{20}$

e. $\sqrt{5}$; 2,23; 2,24

b. $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{4}{8}$

d. $\sqrt{2}$; 1,3; $\frac{14}{9}$

f. $\sqrt{10}$; $\frac{1}{4}$; 2,087

2. Ordena de mayor a menor los elementos del siguiente conjunto: $\{\sqrt{2}; 3; \sqrt{2,5}; \sqrt{3}; 2\}$.

GEOMETRÍA

3. Para ubicar números irracionales en la recta numérica, es necesario aproximarlos, ya que tienen una cantidad infinita de cifras decimales. Para ubicar $\sqrt{2}$ en la recta numérica se puede realizar lo siguiente:

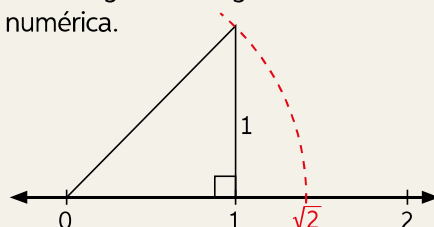
Para realizar:
gbit.cl/T21M2MP014A



PASO 1: En una recta numérica graduada de 1 en 1, se construye un triángulo rectángulo de catetos 1. La base de este es el segmento sobre la recta numérica.

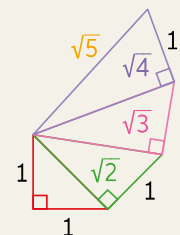
PASO 2: Con un compás se traza un arco de circunferencia con centro en 0 utilizando como radio la medida de la hipotenusa del triángulo.

PASO 3: Se marca la intersección entre el arco de la circunferencia y la recta numérica.



- a. Repite el proceso para ubicar la raíz de 3 dentro de la recta numérica.

El método anterior es similar al que se utiliza para la construcción de la espiral de Teodoro de Cirene. Para construirla, se dibuja un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 1. Luego, se construye un nuevo triángulo rectángulo, ya no isósceles. Los catetos de este nuevo triángulo son la hipotenusa del primer triángulo y uno perpendicular a esta y de medida 1. Este procedimiento se repite indefinidamente.



- b. ¿Es correcto afirmar que $\sqrt{3}$ se encuentra entre $\sqrt{2}$ y 2? Explica.

- c. ¿Entre qué números estimarías la $\sqrt{5}$? ¿Por qué?

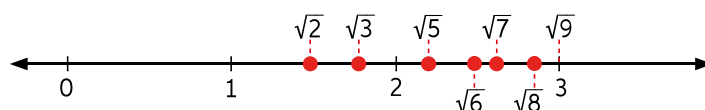
Para saber más:

gbit.cl/T21M2MP014B



- En la recta numérica, si $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, entonces $\sqrt{a}$ se ubica a la izquierda de $\sqrt{b}$. Además, si $a < b$, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Ejemplo:



Si $6 < 7$, entonces $\sqrt{6} < \sqrt{7}$ y $\sqrt{6}$ se ubica a la izquierda de $\sqrt{7}$.

- Se puede estimar el valor de una raíz cuadrada utilizando cuadrados perfectos. Si $a^2 < x < b^2$, entonces $a < \sqrt{x} < b$ ($a, b > 1$).

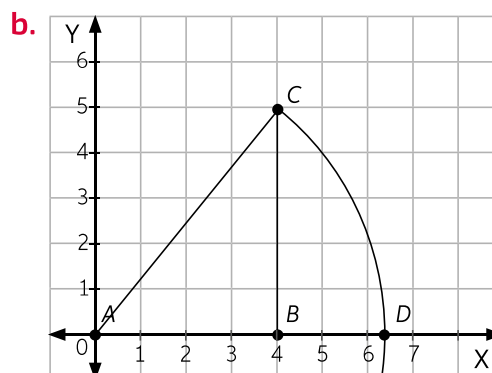
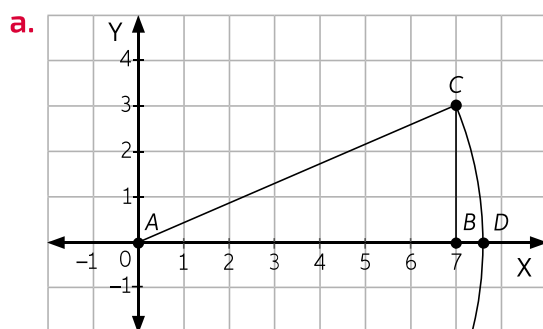
Ejemplo:

Para estimar el valor de $\sqrt{6}$, consideramos que:

Si $4 < 6 < 9$, entonces $\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9} \Leftrightarrow 2 < \sqrt{6} < 3$

Por lo tanto, $\sqrt{6}$ está entre 2 y 3.

4. Determina el punto D. Considera que en cada caso se trazó un arco de circunferencia con centro en (0,0).



Para concluir

- a. ♦ Explica cómo ubicarías $\sqrt{21}$ en la recta numérica.
- b. ♦ Explica entre qué números estimarías la $\sqrt{10}$.



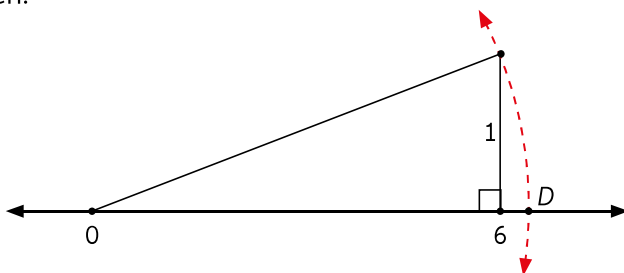
9

- Explica la diferencia entre el conjunto de los números irracionales y el de los números reales.
- Con respecto al número $\sqrt{13}$, ¿cuál es el resultado de sumarlo con su inverso aditivo? ¿y multiplicarlo por su inverso multiplicativo?
- Aproxima a la centésima mediante redondeo.

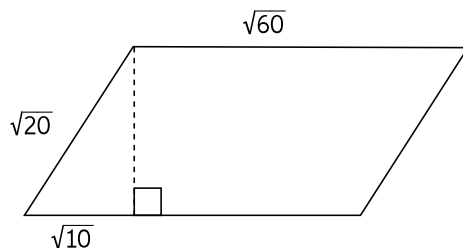
a. $\sqrt{14}$	b. $2\sqrt{5}$	c. $\sqrt{10} + \sqrt{35}$
----------------	----------------	----------------------------
- Resuelve.

a. $\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$	b. $2,1\sqrt{5} - 0,2\sqrt{5}$	c. $-\sqrt{7} + 3\sqrt{28} - \sqrt{63}$
---------------------------------------	--------------------------------	---
- Simplifica.

a. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$	c. $\frac{3\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$	e. $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{50}}$
b. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{75}$	d. $-3\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$	f. $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{60} \cdot \sqrt{24}$
- Analiza la imagen.



- ¿Qué número representa D en la recta numérica?
- Explica cómo lo supiste.
- Ordena de menor a mayor las raíces $2\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, y $4\sqrt{3}$.
- Calcula el área del paralelogramo. Aproxima por redondeo a dos cifras decimales.



Reflexiono

- ¿Qué te costó más de la lección?
- ¿Cómo pueden facilitar los cálculos las propiedades de la adición y la multiplicación?
- Explica cómo resolviste el problema número 8.



10 y 11

Raíz enésima

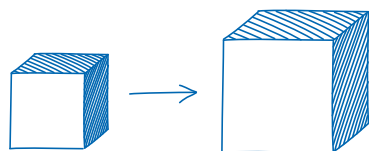
¿Qué expresión algebraica es equivalente a multiplicar a por sí mismo n veces?

¿En qué consiste el proceso de factorización prima?

Objetivo: Comprender el concepto de raíz enésima.

1. Un problema imposible de resolver en la geometría clásica, utilizando solo una regla sin graduar y compás, es la duplicación del cubo, es decir, a partir de un cubo cualquiera construir otro cuyo volumen sea el doble del inicial.

Cubo 1
 $V_1 = 1 \text{ cm}^3$



Cubo 2
 $V_2 = 2 \text{ cm}^3$

El volumen de un cubo de arista x es x^3 .

Para abordar la duplicación del cubo, podemos suponer que tenemos uno cuya arista mide 1 cm, y deseamos construir otro cuyo volumen sea el doble.

- ¿Cuál es el volumen del cubo inicial?
- Si se duplica la medida de su arista, ¿por qué el volumen del segundo cubo no es el doble del volumen del cubo inicial?
- Si el área de cada cara del cubo inicial fuese $a^2 \text{ cm}^2$, ¿qué expresión representa la medida de la arista del cubo?
- Al duplicar el volumen del cubo inicial, se obtiene que este es igual a 2 cm^3 . ¿Qué expresión permite conocer la medida de su arista?

Se llama **raíz enésima** de un número a , y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumple la condición $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$. Donde $\sqrt[n]{a}$ se llama radical; a , radicando o cantidad subradical y n , índice de la raíz.

$\sqrt[4]{81} = 3$, se lee “la raíz cuarta de 81 es 3”, pues $81 = 3^4$.

$\sqrt[3]{-125} = -5$, se lee “la raíz cúbica de -125 es -5”, pues $-125 = (-5)^3$.

$\sqrt{0,25} = 0,5$; se lee “la raíz cuadrada de 0,25 es 0,5”, pues $0,25 = (0,5)^2$.

Además se puede considerar lo siguiente:

- Si n es par, entonces $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
- Si n es impar, entonces $a \in \mathbb{R}$.

2. Calcula las siguientes raíces enésimas:

a. $\sqrt[3]{27}$

c. $\sqrt[3]{-216}$

e. $\sqrt[5]{243}$

g. $\sqrt[5]{32}$

b. $\sqrt[4]{81}$

d. $\sqrt[3]{-729}$

f. $\sqrt[6]{64}$

h. $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

3. Analiza las igualdades. Luego, escribe V o F según corresponda y justifica las falsas.

a. $\sqrt[3]{625} = 25$

b. $\sqrt[4]{16} = 4$

c. $\sqrt[5]{-1024} = 4$

d. $\sqrt[3]{0,125} = 0,5$

4. Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a. $\sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{343}$

b. $\sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{1296}$

c. $\sqrt[4]{256} + \sqrt[3]{729} - \sqrt[3]{8}$

5. Determina los valores de a para que el resultado de la raíz sea un número real.

a. $\sqrt[4]{7-a}$

b. $\sqrt[3]{a-2}$

c. $\sqrt[5]{a^2+8}$

BIOLOGÍA

6. Una población de bacterias cuenta inicialmente con 3 organismos. Se sabe que se reproduce cada hora a una razón desconocida r .

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Bacterias (cantidad)	3	$3 \cdot r$				

a. ¿Qué representa la r ? ¿Qué representa el 3?

b. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

c. ♦ ¿Qué expresión algebraica representa el número de bacterias luego de n horas?

d. ♦ Si al cabo de 6 horas hay 192 bacterias, ¿cuál es el valor de r ? Justifica.



Cada bacteria se multiplica r veces.

7. ♦ ¿Cómo explicarías las igualdades $\sqrt[n]{0} = 0$ y $\sqrt[n]{1} = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$?

Si $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $\sqrt[n]{0} = 0$ Ejemplo: $\sqrt[5]{0} = 0$
- $\sqrt[n]{1} = 1$ Ejemplo: $\sqrt[7]{1} = 1$
- $(\sqrt[n]{a})^n = a$ Ejemplo: $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ Ejemplo: $\sqrt[9]{900} = \sqrt[9]{9 \cdot 100} = \sqrt[9]{3^2 \cdot 10^2} = 3 \cdot 10 = 30$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ Ejemplo: $\sqrt[4]{\frac{32}{81}} = \sqrt[4]{\frac{2^5}{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{2^4 \cdot 2}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{2}}{3}$

Además, para p y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

- $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$ Ejemplo: $(\sqrt[3]{10})^4 = \sqrt[3]{10^4} = \sqrt[3]{10^3 \cdot 10} = 10 \cdot \sqrt[3]{10}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$ Ejemplo: $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

8. Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a. $\sqrt[5]{-1}$

c. $\sqrt[7]{128} + \sqrt[3]{-27}$

e. $\sqrt[4]{10000} - \sqrt[4]{625}$

b. $\sqrt[3]{8}$

d. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}}$

f. $\sqrt[9]{1} + \sqrt[11]{-1} + \sqrt{1}$

9. ¿Crees que la igualdad $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ siempre se cumple si a y b son números reales positivos? Discute con un compañero.

10. Descompón y simplifica aplicando las propiedades de las raíces.

a. $\sqrt{180}$

b. $\sqrt{\frac{128}{25}}$

c. $\sqrt[4]{40000}$

d. $\sqrt[3]{\frac{648}{8}}$

11. ♦ Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

a. $\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$

c. $\sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{-8} \cdot \sqrt[6]{-2}$

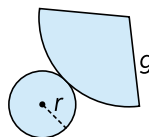
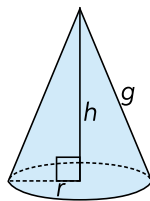
b. $\sqrt[4]{20} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$

d. $\sqrt[4]{16+81} = \sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{81}$

12. La altura (h) de un cono mide $3\sqrt{5}$ cm y el radio (r) mide $2\sqrt{3}$ cm.

Recuerda que:

El volumen del cono es $\frac{\pi}{3} hr^2$



$$A = \pi \cdot g \cdot r + \pi \cdot r^2 = \pi r \cdot (g + r)$$

- ¿Cuál es el valor de su generatriz (g)?
- Determina el volumen del cono.
- Determina el área de la superficie del cono.

ACTIVIDADES DE PROFUNDIZACIÓN

13. ♦ Analiza la siguiente demostración. Luego, realiza las actividades.

“Si a es negativo, no existe b real, tal que $b = \sqrt{a}$ ”. Para demostrarlo se asume lo contrario, es decir, que sí existe b que cumple la condición. Entonces, se tiene que:

$$\sqrt{a} = b, \text{ entonces } a = b^2 = b \cdot b$$

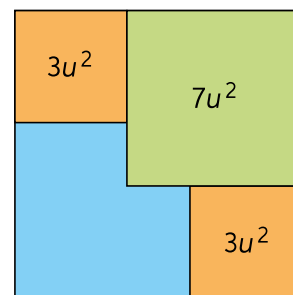
Si b fuera positivo, entonces b^2 también lo sería, por lo que no podría tener un valor negativo. Por lo tanto, no puede ser positivo y se llega a una contradicción.

- ¿Qué ocurre con b^2 para el caso de b negativo? ¿Es una contradicción? Justifica.
- ¿Cómo utilizarías la propiedad $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$ y la demostración anterior para justificar que “las raíces pares negativas no son reales”?

GEOMETRÍA

14. ♦ La figura es un cuadrado en cuyo interior se dibujaron otros tres cuadrados. Las áreas se muestran en u^2 .

- Determina la medida del lado de los cuadrados verde y naranja.
- Determina el área total del cuadrado.
- Determina el área de la figura azul.



Para concluir

- ¿Cómo puedes verificar si la raíz enésima de un número está bien calculada? Explica.
- ¿Cuándo la enésima raíz de un número no representa un número real y por qué? Da dos ejemplos y explícalos.



12 y 13

Raíces enésimas y potencias de exponente racional

Objetivo: Establecer la relación entre una raíz enésima y una potencia de exponente racional.

¿Qué características tiene un número racional?
¿Qué propiedades tienen las potencias? Elabora un listado.

1. En parejas, calculen las siguientes raíces. Utiliza calculadora.

$$\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[9]{8}$$

$$\sqrt{49}$$

$$\sqrt[4]{2401}$$

$$\sqrt[6]{4}$$

$$\sqrt[12]{16}$$

$$\sqrt[3]{343}$$

$$\sqrt[5]{16807}$$

- ¿Qué expresiones tienen el mismo resultado? Escribanlas como una igualdad.
- Escriban las cantidades subradicales de las raíces como factores primos.
- ¿Qué relación existe entre los exponentes de los factores primos y los índices de las raíces con el mismo resultado?

Se puede relacionar la raíz enésima con una potencia de exponente racional, como se muestra a continuación:

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ pues, $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{1}{2} \cdot 2} = a^1 = a$
- $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$ pues, $(a^{\frac{2}{3}})^3 = a^{\frac{2}{3} \cdot 3} = a^2$

En términos generales se cumple que:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ con } m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplos: $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$ $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9^{\frac{3}{3}} = 9$

2. Escribe cada potencia como una raíz.

a. $6^{\frac{1}{5}}$

d. $(\frac{1}{6})^{1,3}$

g. $16^{0,4}$

j. $3^{\frac{1}{2}}$

b. $24^{\frac{5}{9}}$

e. $101^{\frac{3}{n}}$

h. $3^{-2,5}$

k. $x^{\frac{1}{5}}$

c. $5^{\frac{5}{2}}$

f. $(-4)^{\frac{4}{5}}$

i. $(\frac{25}{16})^{\frac{2}{5}}$

l. $x^{\frac{5}{3}}$

3. Escribe cada raíz como una potencia. Simplifica el resultado.

a. $\sqrt{6}$

d. $\sqrt[15]{2^{-5}}$

g. $\sqrt[9]{(\frac{2}{3})^3}$

j. $\sqrt[3]{x^2}$

b. $\sqrt[4]{3^6}$

e. $\sqrt[n]{(-5)^3}$

h. $\sqrt[3]{(\frac{5}{125})^6}$

k. $\sqrt{a^3}$

c. $\sqrt[5]{9^6}$

f. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$

i. $\sqrt[5]{(-3)^2}$

l. $\sqrt[5]{a^3}$

4. ♦ Analiza las siguientes igualdades e identifica el error. Luego, corrígelo.

a. $(\sqrt{15})^3 = 15^{\frac{2}{3}}$

b. $-(\sqrt[3]{9})^2 = (-9)^{\frac{2}{3}}$

5. Analiza la siguiente actividad resuelta. Luego, explícale a un compañero el procedimiento que se realizó.

$$\begin{aligned}
 & 2^{\frac{3}{2}} - 27^{\frac{1}{2}} + 192^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{4}{3}} \\
 &= \sqrt{2^3} - \sqrt{27} + \sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{3^4} \\
 &= \sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt[3]{64 \cdot 3} - \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} \\
 &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} + \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} \\
 &= 2 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt[3]{3} - 3 \cdot \sqrt[3]{3} \\
 &= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} \\
 &= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt[3]{3}
 \end{aligned}$$

Para multiplicar potencias de exponente racional se aplican las siguientes propiedades:

- Con igual base

$$x^{\frac{a}{b}} \cdot x^{\frac{c}{d}} = x^{\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)}$$

Ejemplo:

$$2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$$

- Con igual exponente

$$x^{\frac{a}{b}} \cdot y^{\frac{a}{b}} = (x \cdot y)^{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo:

$$(16)^{\frac{1}{4}} \cdot (4)^{\frac{1}{4}} = (16 \cdot 4)^{\frac{1}{4}} = 64^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = 2\sqrt[4]{2^2}$$

6. Resuelve las siguientes multiplicaciones y expresa el resultado en raíz.

a. $\left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$

b. $0,2^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

ASTRONOMÍA

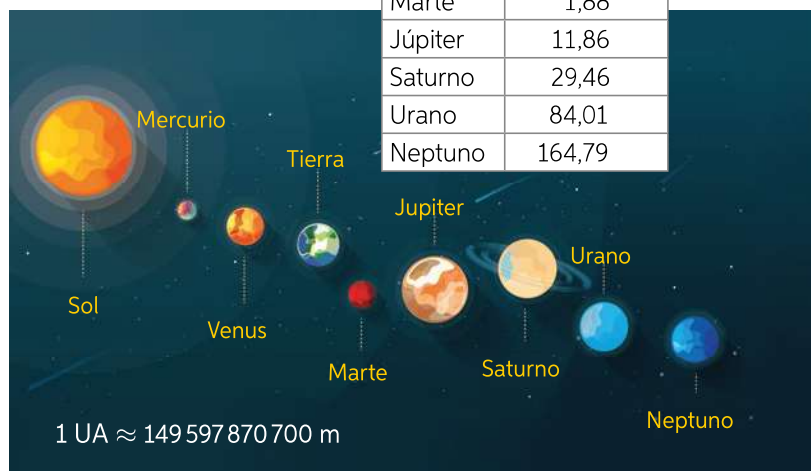
7. Analiza la situación y responde.

La tercera ley de Kepler relaciona el periodo de traslación de un planeta T , en años, con la distancia media d entre el planeta y el Sol, medida en unidades astronómicas (UA). La expresión que la resume es la siguiente:

$$T = \sqrt{d^3}$$

- Escribe la tercera ley de Kepler utilizando solo potencias naturales.
- Utilizando calculadora, determina el periodo de traslación de los planetas.
- ¿Qué expresión algebraica describe la distancia al Sol de un planeta en función de su periodo de traslación?
- ¿Cuál es la distancia al Sol de un planeta cuyo periodo de traslación es de 27 años?

Planeta	Distancia (UA)
Mercurio	0,39
Venus	0,95
Tierra	1,00
Marte	1,88
Júpiter	11,86
Saturno	29,46
Urano	84,01
Neptuno	164,79



Para concluir

- Si el área de un cuadrado es $7\sqrt{6} \text{ cm}^2$, ¿cuánto mide su lado?
- ¿En qué casos el producto de raíces da como resultado un número entero?



14 y 15

Racionalización

¿En qué consiste amplificar una fracción? Da un ejemplo.
Al amplificar una fracción, ¿cambia su valor? Explica.

Objetivo: Estudiar y analizar el proceso de racionalización de una fracción.

1. Considera los siguientes números:

$$\sqrt{2} \quad \sqrt{0,5} \quad 2^{\frac{3}{2}} \quad 2^{-\frac{1}{2}} \quad \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[3]{2} \quad 2^{\frac{6}{4}} \quad 2\sqrt{\frac{1}{2}}$$

- Construye una recta numérica y ubica los números anteriores. Ayúdate con una calculadora o aplicación para calcular sus valores.
- ¿Qué números tienen la misma ubicación?
- En parejas, transformen las raíces anteriores a potencias racionales de base 2.

¿Qué igualdades te parecieron evidentes?, ¿cuáles no? ¿A qué se debe?

Racionalizar una expresión fraccionaria significa encontrar otra expresión que sea equivalente a ella, pero que no contenga raíces en el denominador.

Por ejemplo, para raíces cuadradas:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Amplificamos la fracción por una expresión equivalente a "1".

Simplificamos.

¿Por qué no se multiplica solo por $\frac{1}{\sqrt{2}}$ para racionalizar la expresión anterior?

2. Racionaliza la expresión $\frac{3}{\sqrt{5}}$ y responde. Puedes guiarte por el ejemplo anterior.

- Respondan en parejas: ¿Por cuál factor se puede amplificar la fracción?
- ¿Qué propiedad de las raíces justifica el último paso?
- De forma individual, encuentra una expresión equivalente a $\frac{3}{\sqrt{5}}$ sin raíces en el denominador.

3. Reúnanse en parejas y racionalicen las siguientes expresiones:

Ejemplo: $\frac{3}{\sqrt{32}} = \frac{3}{\sqrt{16 \cdot 2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$

- | | | | |
|-------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|
| a. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | c. $\frac{3}{2\sqrt{8}}$ | e. $\frac{11}{6\sqrt{3}}$ | g. $\frac{10}{\sqrt{(a+3)}}$ |
| b. $\frac{7}{\sqrt{7}}$ | d. $-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{21}}$ | f. $-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{8}}$ | h. $\frac{13}{\sqrt{(13-a)}}$ |

¿Qué condiciones debe satisfacer a para que la raíz esté bien definida en cada expresión de los ejercicios g y h?

4. Analiza el siguiente procedimiento para racionalizar $\frac{4}{3 + \sqrt{10}}$ y responde.

$$\frac{4}{3 + \sqrt{10}} = \frac{4}{3 + \sqrt{10}} \cdot \frac{(3 - \sqrt{10})}{(3 - \sqrt{10})} = \frac{4(3 - \sqrt{10})}{(3 + \sqrt{10})(3 - \sqrt{10})}$$

- ¿Qué relación existe entre el denominador de la fracción y el factor por el cual se amplifica?
- ¿Qué producto notable resulta en el denominador de la fracción?
- Desarrolla la operación anterior y completa el procedimiento.
- ♦ Utiliza el mismo razonamiento para racionalizar la expresión $\frac{4}{3 - \sqrt{10}}$. ¿Qué tienen en común ambos procedimientos?

Para racionalizar las expresiones de la forma $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ y $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$, con a y b números reales mayores a 0 y distintos, realizaremos el siguiente procedimiento:

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}$$

Dicho de otra forma, si el denominador de la fracción es un binomio con raíces, se amplifica por el factor faltante de la **suma por su diferencia** para racionalizarla.

- ▶ ¿Por qué en ambos casos el denominador resultante es $a - b$?

5. Racionaliza las siguientes expresiones:

Por ejemplo: $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

Aplicamos la suma por su diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$,
donde $(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ corresponde al factor $(a + b)$.

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$$

a. $\frac{10}{2 + \sqrt{8}}$

e. $\frac{1}{7 - \sqrt{6}}$

i. $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$

b. $\frac{9}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

f. $\frac{2}{2 + 2\sqrt{2}}$

j. $\frac{6\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{9}}$

c. $\frac{6}{\sqrt{13} + \sqrt{10}}$

g. $-\frac{3}{\sqrt{14} - \sqrt{5}}$

k. $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{3b}}$

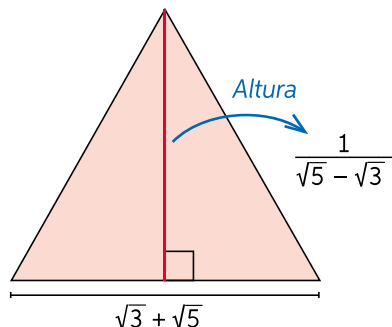
d. $\frac{32}{21 - \sqrt{13}}$

h. $-\frac{7}{\sqrt{7} + \sqrt{12}}$

l. $\frac{2a}{\sqrt{a + b} - \sqrt{a - b}}$

6. ♦ ¿Qué condiciones deben cumplir a y b para que las raíces estén bien definidas en los ejercicios k y l?

7. Determina el área del triángulo. Racionaliza el resultado.



8. Racionaliza y luego evalúa la expresión obtenida para $a = 5$, $b = 2$ y $c = 6$ en cada caso.

Por ejemplo:

$$\frac{c}{\sqrt{c} + \sqrt{b}}$$

Paso 1: Racionalizamos.

$$\frac{c}{\sqrt{c} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{\sqrt{c} - \sqrt{b}} = \frac{c \cdot (\sqrt{c} - \sqrt{b})}{c - b}$$

Paso 2: Evaluamos y simplificamos.

$$\frac{6 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{6 - 2} = \frac{6 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$$

$$\frac{3 \cdot (\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2})}{2} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

a. $\frac{c}{\sqrt{a}}$

b. $\frac{b}{\sqrt[3]{a}}$

c. $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$

d. $\frac{c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

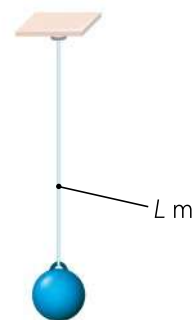
e. $\frac{b}{b + \sqrt{b}}$

f. $\frac{a}{2\sqrt{c} - \sqrt{b}}$

ACTIVIDADES DE PROFUNDIZACIÓN

FÍSICA

9. El tiempo T que tarda un péndulo simple de largo L en realizar una oscilación completa está determinado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, donde g es la aceleración de gravedad.
- a. Racionaliza la expresión para calcular el período de un péndulo simple.
- b. ¿Cuál es el período de un péndulo de largo 0,5 m? Considera $g = 10 \frac{m}{s^2}$.



Para concluir

- a. ¿Qué aspectos debes considerar al racionalizar una fracción? Explica.
- b. ♦ ¿Cómo se puede verificar que la expresión racionalizada es equivalente a la original? Comenta y aplícalo en un ejercicio.

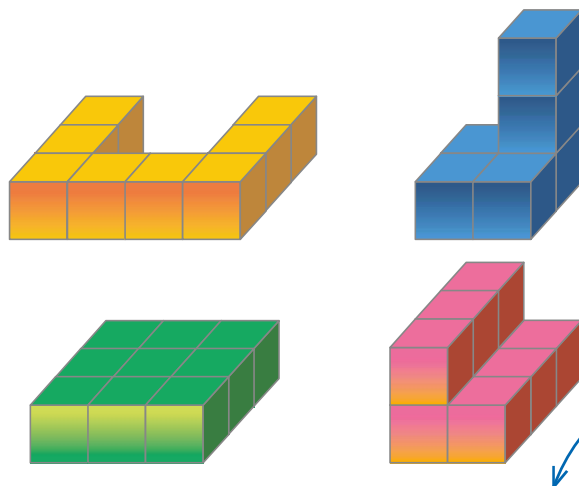


16 y 17

La ley cuadrado-cúbica

1. En grupos de 3 o 4 personas, utilicen los materiales en la siguiente actividad.

PASO 1: Utilizando los cubos, construyan un cuerpo sencillo como los de los ejemplos.



Materiales:

- Regla.
- Cubos, que deben ser siempre del mismo tamaño entre sí:
 - Dados de 6 caras.
 - Cubos Rubik.
 - Cubitos de madera.

Recuerda que en una figura 3D la arista es el lado común a dos caras.

PASO 2: Midan con la regla y anoten el valor de la arista de uno de los cubos utilizados. Luego, calculen la superficie y el volumen total del cuerpo original que construyan.

PASO 3: Dupliquen, tripliquen y cuadripliquen (si es posible) el cuerpo original. Repitan las mediciones y registros del paso 2.

- a. Comprueben si en sus figuras se replica la siguiente relación:

Si tienes un cubo de 1 cm de arista su área será $1 \cdot 1 \cdot 6 = 6 \text{ cm}^2$, mientras que su volumen será $1^3 = 1 \text{ cm}^3$. Si duplicas sus aristas, su área pasará a ser $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$, mientras que su volumen aumentará a $2^3 = 8 \text{ cm}^3$. Es decir, aumentó 4 veces su superficie y 8 veces su volumen.

- b. Plantea la razón entre los lados de los cuerpos anteriores. Plantea, además la razón entre sus áreas y la razón entre sus volúmenes.
- c. ♦ ¿Cómo se relacionan las razones anteriores? Plantea una expresión algebraica.
- d. ♦ Dos cuerpos tienen sus áreas en la razón $\frac{9}{5}$. ¿Es posible construir dos cuerpos que cumplan la razón utilizando los cubos? Justifica.
- e. ♦ Dos cuerpos tienen sus volúmenes en la razón $\frac{8}{27}$. ¿Es posible construir dos cuerpos que cumplan la razón utilizando los cubos? Justifica.

Reflexiono

- a. Para los antiguos griegos fue imposible hallar el valor del lado de un cubo que duplique el volumen del otro. ¿A qué crees que se debió su problema?
- b. ¿Necesariamente esta actividad se debe hacer con cubos? ¿Qué otras figuras utilizarías y por qué?



18 y 19

Definición de logaritmos

¿A qué número es necesario elevar 2 para obtener $\sqrt{2}$?

¿Qué ecuación plantearías para resolver el problema anterior?

Objetivo: Identificar los logaritmos y su relación con las potencias.

1. En parejas, observen las relaciones descritas por los siguientes jóvenes referidas a la expresión $4^5 = 1024$.

- a. En cada caso, describan la relación usando las tres interpretaciones señaladas.

$$2^8 = 256 \quad 3^6 = 729 \quad 5^4 = 625$$



- b. Completen la tabla siguiendo el ejemplo.

Potencia	Base	Exponente	Logaritmo
$8^3 = 512$	8	3	$\log_8(512) = 3$
$10^4 = 10000$	6	-2	
			$\log_9(1) = 0$
			$\log_{64}(4) = \frac{1}{3}$

2. Respondan cada pregunta justificando sus respuestas.

- a. ¿La base de un logaritmo puede ser negativa?
- b. ¿Existe el logaritmo de un número negativo?, ¿y el logaritmo de 0?
- c. ¿Cuál es el logaritmo de 1 en base 3?, ¿y en base 7? ¿Depende tu respuesta de la base?

Se llama **logaritmo de base b de a** al número c al cual debe elevarse la base b para obtener a. Es decir:

$$b^c = a \leftrightarrow \log_b a = c \quad \text{Con } a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1 \text{ y } c \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo: $5^3 = 125 \leftrightarrow \log_5 125 = 3$ y se lee "logaritmo en base 5 de 125".

Para relacionar una potencia, un logaritmo y una raíz enésima, se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{9} = 3 \leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}} = 3 \leftrightarrow \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

b se denomina base del logaritmo y a se denomina argumento.

Si b = 10, se habla de logaritmo decimal o común y en lugar de " $\log_{10}$ " se escribe simplemente "log".

1. Representa las siguientes relaciones numéricas usando logaritmos.

Ejemplo: $5^2 = 25 \leftrightarrow \log_5 25 = 2$

a. $9^3 = 729$

d. $9\frac{1}{2} = 3$

g. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$

b. $0,3^2 = 0,09$

e. $5^{-2} = \frac{1}{25}$

h. $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

c. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

f. $0,01^{-2} = 10000$

i. $8^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{32}$

2. Determina en cada caso el valor de a.

Ejemplo: $\log_2 a = 3 \leftrightarrow 2^3 = a \rightarrow 8 = a$

a. $\log_a 2 = \frac{1}{2}$

d. $\log_5 0,04 = a$

g. $\log_9 a = 4$

b. $\log_a 8 = 3$

e. $\log_{\frac{81}{1}} 9 = a$

h. $\log_7 a = 3$

c. $\log_a 5 = -2$

f. $\log_{\frac{1}{64}} 2 = a$

i. $\log_{1000} a = -\frac{1}{3}$

3. Lee la siguiente información y responde utilizando tu calculadora.

En una calculadora científica, el botón “log” por defecto tiene una base 10. Para calcular un logaritmo debes seguir la secuencia:

“Log”, “cantidad” y “=”

- a. Calcula los siguientes logaritmos utilizando tu calculadora.

• $\log 1000$

• $\log 0,1$

• $\log 0,2$

• $\log 100$

• $\log 1$

• $\log 20$

• $\log 10$

• $\log 2$

• $\log 200$

- b. ♦ Comprueba los resultados anteriores utilizando la definición de logaritmos.

- c. ♦ ¿Cuál(es) de los resultados tiene(n) una diferencia aproximada de 0,301?

- d. ♦ Ingresa en la calculadora “log”, “-10” y “=”. ¿Cómo explicas lo ocurrido?

4. ♦ Comprueba si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Justifica.

a. $\log_5 25 = 2$

e. $\log_2 10 = 100$

i. $\log 10^5 = 5$

b. $\log_2 0,25 = 0,5$

f. $\log_{10} 0 = 1$

j. $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$

c. $\log_9 -3 = 2$

g. $\log_4 0,25 = -2$

k. $\log_8 \sqrt[3]{64} = \frac{3}{2}$

d. $\log_1 3,78 = 0$

h. $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

l. $\log_2 \sqrt[3]{64} = 2$

Para concluir

- a. ¿Cuál es la relación entre la expresión $\log_b a$ y una potencia? ¿y con una raíz?

- b. ¿La base de un logaritmo puede ser negativa? ¿por qué?



20 a 21

Propiedades de los logaritmos

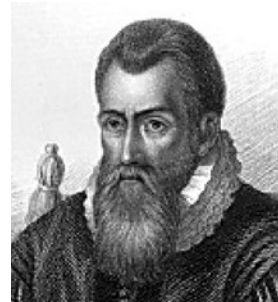
¿Cómo se expresa como potencia $\log_b a = c$?

¿Cuál crees que fue el problema que dio origen a los logaritmos?

Objetivo: Comprender y verificar las propiedades de los logaritmos.

Si a es un número real positivo distinto de 1, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- Logaritmo de la base: $\log_a a = 1$
- Logaritmo de la unidad: $\log_a 1 = 0$



John Napier
(1550 - 1617)

Fue un matemático, físico y astrónomo escocés que introdujo el concepto de logaritmo a principios del siglo XVII como un medio de simplificación de los cálculos.

- ◆ Utilizando las propiedades anteriores responde:
 - Comprueba cada propiedad con 3 valores distintos de a .
 - Demuestra las propiedades anteriores planteándolas como potencias. Utiliza, para ello, la definición de logaritmo.
 - ◆ ¿Qué propiedades de potencias utilizaste para realizar la actividad anterior? Identifícalas y coméntalas con tu curso.
- ◆ Analiza el siguiente procedimiento. Luego, realiza las actividades:

Si $\log_b a = c$, entonces $b^c = a$

PASO 1: Elevamos a n ambos lados de la igualdad: $(b^c)^n = a^n \rightarrow b^{c \cdot n} = a^n$

PASO 2: Utilizando la definición de logaritmo: $\log_b(a^n) = n \cdot c$

PASO 3: Reemplazamos c por $\log_b a$: $\log_b(a^n) = n \cdot \log_b a$

- ¿Qué propiedades de potencias se utilizaron? Nómbralas.
- Comprueba cada propiedad con 3 valores distintos de a y n .

Sean b y x números reales positivos con $b \neq 1$ y n un número real, se cumple la propiedad de **logaritmo de una potencia de la base**:

$$\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$$

- ◆ Utilizando la propiedad anterior, comprueba las siguientes proposiciones.

a. $\log_b(\sqrt[n]{a}) = \frac{\log_b a}{n}$

b. $\log_b\left(\frac{1}{a}\right) = -\log_b a$

- Calcula el valor de los siguientes logaritmos aplicando las propiedades vistas.

a. $\log_3 \sqrt[5]{81}$

c. $\log_7 49^{21}$

e. $\log_3 27^{10}$

b. $\log_5 \frac{1}{625}$

d. $\log_7 \sqrt{7}$

f. $\log_4 \sqrt[8]{64}$

5. Calcula el valor de los logaritmos utilizando el siguiente razonamiento.

En los cálculos necesarios para el desarrollo de la astronomía, se presentaban operaciones como $65\,536 \cdot 16\,384$. Como se puede ver, los factores eran bastante grandes, lo que podía conducir a múltiples errores. Entonces, John Napier inventó “números artificiales” (logaritmos) que utilizaba para simplificar las operaciones de la siguiente forma:

PASO 1: Transformaba ambos números a una potencia de base común:

$$4^8 = 65\,536 \qquad 4^7 = 16\,384$$

PASO 2: Utilizando sus “números artificiales”, transformaba la multiplicación en suma:

$$\begin{aligned} \log_4(65\,536 \cdot 16\,384) &= \log_4(65\,536) + \log_4(16\,384) \\ &= \log_4 4^8 + \log_4 4^7 \\ &= 8 + 7 \\ &= 15 \end{aligned}$$

PASO 3: Así, en vez de calcular $65\,536 \cdot 16\,384$, obtenía el mismo resultado mediante la potencia de 4^{15} , el cual se buscaba en las tablas de potencias que había construido.

Vega, G. (1797).

Tablas logarítmicas-trigonométricas
(2. verb., verm. und gänzlich umgearb. Aufl. ed.).
Leipzig: Weidmannische Buchhandlung.

a. $\log_6(6 \cdot 36)$

d. $\log_6(1296 \cdot 36)$

g. $\log_{11}(11 \cdot 1331)$

b. $\log_4(16 \cdot 256)$

e. $\log_4(256 \cdot 4)$

h. $\log_8(64 \cdot 32768)$

c. $\log_3(9 \cdot 81)$

f. $\log_5(25 \cdot 3125)$

i. $\log_5(5 \cdot 390625)$

Sean b , x e y números reales positivos con $b \neq 1$, entonces:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Dicho de otra forma, el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores manteniendo la misma base. El logaritmo de un cociente es la resta de los logaritmos de los factores manteniendo la misma base.

6. En parejas, utilice cada uno un método de cálculo distinto para determinar los valores de los siguientes logaritmos. Una persona utilizará las propiedades anteriores de logaritmo y la otra seguirá el razonamiento de Napier. Luego, revisen su desarrollo y comparen sus resultados.

a. $\log_6(216:36)$

c. $\log_2(32:8)$

e. $\log_6(7776 : 216)$

b. $\log_4(256:4)$

d. $\log_3(729:27)$

f. $\log_8(262144 : 512)$

► ♦ ¿Facilitó el trabajo en parejas el desarrollo de la actividad anterior? ¿Por qué?

7. Analiza la siguiente demostración:

Al calcular el producto y el cociente entre x e y representando como potencias los logaritmos:

$$\log_b(x) = m \rightarrow b^m = x$$

$$\log_b(y) = n \rightarrow b^n = y$$

Se tiene que:

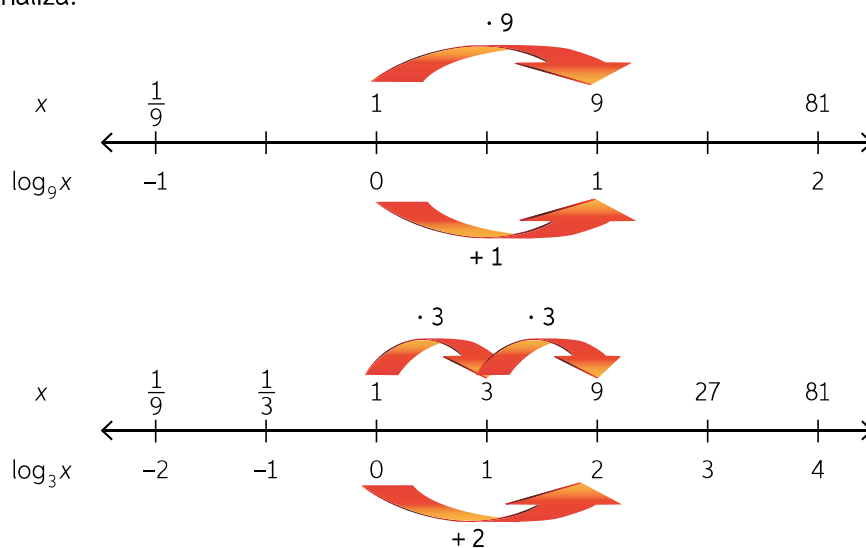
$$x \cdot y = b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

$$x : y = b^m : b^n = b^{m-n}$$

$$\rightarrow \log_b(x \cdot y) = m + n = \log_b(x) + \log_b(y) \quad \rightarrow \log_b(x : y) = m - n = \log_b(x) - \log_b(y)$$

- a. ¿Qué propiedades de las potencias se utilizaron? Identifícalas.
- b. ♦ ¿Cómo puedes utilizar las propiedades $\log_b\left(\frac{1}{a}\right) = -\log_b a$ y $\log_b(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ para demostrar $\log_b(x : y) = \log_a x - \log_a y$?

8. Analiza:



- a. ¿Qué relación observas entre ambas escalas?
- b. ¿Cómo explicarías que $\log_3 9 = 2 \cdot \log_9 9$ utilizando las escalas anteriores?
- c. Construye una escala logarítmica de $\log_{\sqrt{3}} x$ y $\log_{81} x$. ¿Cuál es la equivalencia en ambas escalas para $\log_9 9$? ¿Cómo se relaciona con el cambio de base logarítmica?
- d. Se quiere modificar $\log_3(10)$ a un logaritmo de base 9. ¿Por cuánto se debe multiplicar $\log_9(10)$?
- e. ¿Cuál debe ser el valor de n en $\log_4(16) = n \cdot \log_8(16)$? ¿Cómo se relaciona con que $4^n = 8$?

Sean a y b números reales positivos diferentes de 1 y x un número real positivo:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Dicho de otra forma, es posible realizar un **cambio de base** para expresar un logaritmo de una base cualquiera en otra base.

9. ♦ Analiza el siguiente procedimiento. Luego, realiza las actividades.

$$\text{Sea } \log_b(a) = c \rightarrow b^c = a$$

Paso 1: $b^c = a \Rightarrow \log_p(b^c) = \log_p(a)$

Paso 2: $c \cdot \log_p(b) = \log_p(a)$

Paso 3: $c = \frac{\log_p(a)}{\log_p(b)}$

Paso 4: $\log_b(a) = \frac{\log_p(a)}{\log_p(b)}$

Ejemplo de cambio de base:

$$\begin{aligned} \log_8 4 &= \frac{\log_2 4}{\log_2 8} \\ &= \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Recuerda que la tecla "log" se encuentra en base 10.

- a. Describe en cada paso los procedimientos realizados.
- b. Comprueba si las siguientes proposiciones son correctas. Utiliza una calculadora y el teorema del cambio de base.
- $\log_2 10 \approx 3,322$
 - $\log_8 2 = 0,3$
 - $\log_5 3 \approx 0,683$

10. Calcula el valor de los siguientes logaritmos aplicando las propiedades vistas.

Ejemplo: $\log_5 \sqrt[5]{625} = \frac{1}{5} \log_5 625 = \frac{1}{5} \log_5 5^4 = \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5}$

a. $\log_2 \frac{1}{8}$

d. $\log_2 \frac{32}{1024}$

g. $\log \left(\frac{10^{11} \cdot 10^5}{10^7} \right)^2$

b. $\log_3 \sqrt{\frac{1}{81}}$

e. $\log_{\sqrt{3}} 81$

h. $\log \left(\frac{100^4}{0,001} \right)^3$

c. $\log_7 \sqrt[4]{7^3}$

f. $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{64}{27}$

i. $\log_{11} \sqrt[3]{\frac{1}{121^5}}$

ACTIVIDADES DE PROFUNDIZACIÓN

11. Expresa cada logaritmo en términos de m y n , con $m = \log 2$ y $n = \log 3$. Guíate por el ejemplo.

$$\log_5 24 = \frac{\log 24}{\log 5} = \frac{\log(8 \cdot 3)}{\log\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{\log(2^3 \cdot 3)}{\log\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{\log 2^3 + \log 3}{\log 10 - \log 2} = \frac{3 \log 2 + \log 3}{\log 10 - \log 2} = \frac{3m + n}{1 - m}$$

a. $\log_2 3$

c. $\log_3 30$

e. $\log_{15} 27$

b. $\log_3 2$

d. $\log_4 \sqrt{12}$

f. $\log 0,2$

12. ♦ Utilizando propiedades, escribe dos expresiones logarítmicas de base distinta a 6 equivalentes al número 6. Guíate por el ejemplo.

$$6 = 6 \log_3 3 = \log_3 729 = \log_3 \frac{2916}{4} = \log_3 2916 - \log_3 4$$

Para concluir

- a. ♦ ¿Se puede escribir un logaritmo en cualquier base real? Justifica.
- b. ♦ ¿Qué utilidad tiene el cambio de base para utilizar la calculadora?



22 a 24

Aplicaciones de los logaritmos

Si deseas determinar el valor de x en la ecuación: $3^x = 2$, ¿ocuparías una raíz enésima o un logaritmo? ¿Por qué?
¿Qué diferencia una escala logarítmica de una recta numérica? Justifica.

Objetivo: Modelar situaciones de la vida cotidiana y otras asignaturas mediante logaritmos.

En una expresión algebraica de la forma $a^b = c$ se pueden calcular cada una de sus cantidades si se conocen las otras dos. Esto se realiza mediante tres operaciones distintas:

- Si se desconoce c , se utilizan **potencias** para encontrar su valor.
Ej: Si $a = 5$ y $b = 3$, entonces $c = 5^3 = 125$.
- Si se desconoce a , se utilizan **raíces** para encontrar su valor.
Ej: Si $b = 4$ y $c = 81$, entonces $a^4 = 81 \rightarrow a = \sqrt[4]{81} = 3$.
- Si se desconoce b , se utilizan **logaritmos** para encontrar su valor.
Ej: Si $a = 7$ y $c = 2401$, entonces $7^b = 2401 \rightarrow b = \log_7 2401 = 4$.

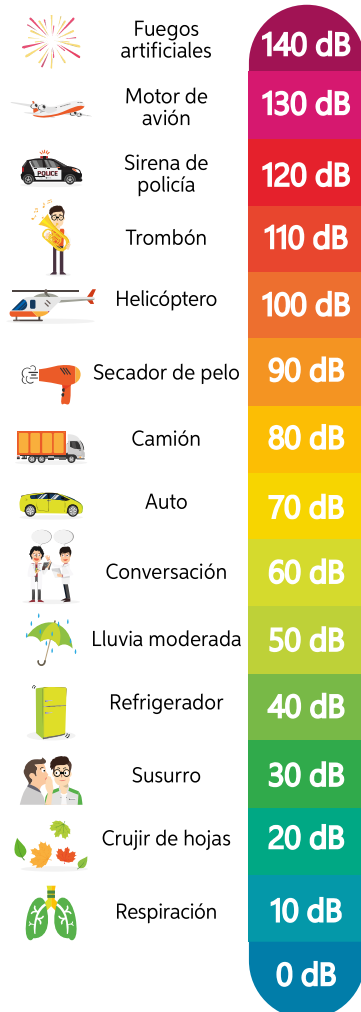
Sonido

1. La intensidad del sonido puede ser medida de dos formas distintas:

- **Intensidad sonora (β):** se mide en decibeles (dB).
- **Intensidad acústica (I):** corresponde a la cantidad de energía transportada por una onda sonora aplicada en una superficie. Se mide en watts sobre metro cuadrado ($\frac{W}{m^2}$).
Estas se relacionan mediante la expresión:

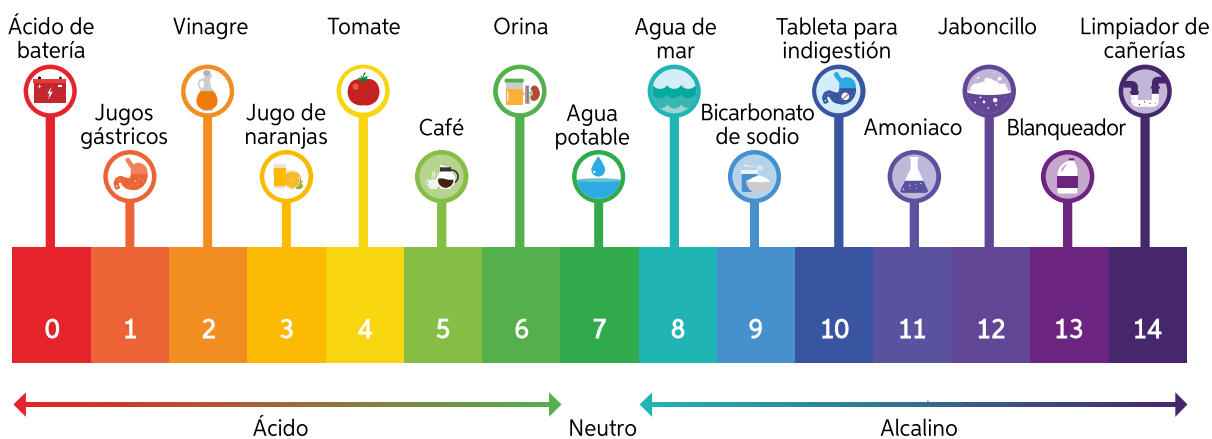
$$\beta = 10 \cdot \log(I) + 120$$

- El umbral del dolor es $1 \frac{W}{m^2}$ para el ser humano. ¿Cuál es la equivalencia en decibeles? ¿Qué situaciones de la imagen resultan doloras para el oído humano?
 - ¿Qué expresión algebraica se utiliza para calcular la intensidad acústica (I) dada la intensidad sonora (β)?
 - Utiliza la expresión anterior para determinar la intensidad acústica de 3 sonidos distintos.
 - Se sabe que la intensidad de un equipo duplica la de otro equipo. ¿Cuál es la diferencia que poseen en decibeles?
- ◆ ¿Por qué es importante no exponerse a sonidos de alta intensidad? Comenta.



QUÍMICA

2. Para medir la acidez o alcalinidad de una sustancia se utiliza el pH . Este asocia la concentración de moles de hidrógeno $[H^+]$ en la sustancia (en moles por litro) según la fórmula: $pH = -\log[H^+]$



- Calcula el pH de una sustancia cuya concentración de iones de hidrógeno es de 0,00000038 moles por litro.
- La escala de pH varía entre 0 y 14. ¿Cuáles son las concentraciones de moles de hidrógeno máximas y mínimas de la escala?
- Calcula la concentración de moles de hidrógeno aproximada de 3 sustancias distintas.
- ♦ ¿Qué expresión algebraica utilizaste para calcular las concentraciones anteriores? ¿Cómo se relaciona con la fórmula para calcular el pH ?

BIOLOGÍA

3. La relación entre el área de la superficie corporal a de una persona en m^2 , su masa m en kg y su altura h en cm está dada por la expresión:

$$\log(a) = -2,144 + 0,425 \log(m) + 0,725 \log(h)$$

- ¿Cuál es el área aproximada de una persona si su masa es 70 kg y su altura, 1,75 m?
 - Determina la estatura aproximada de una persona si el área de su cuerpo es 2 m^2 y su masa, 80 kg.
 - ♦ Utilizando propiedades de logaritmos, encuentra una expresión equivalente a la fórmula anterior. Compruébala utilizando los resultados anteriores.
4. La temperatura final de un cuerpo T_f transcurridos t minutos está dada por su temperatura inicial T_i , la temperatura ambiental T_a y la constante a de la forma:

$$T_f = T_a + (T_i - T_a) \cdot a^t$$

Considera un pan recién horneado a 180 °C, en un día con 20 °C ambientales.

- ¿Cuál es la ecuación que rige el enfriamiento si $a = 0,85$?
- ¿Luego de cuántos minutos se encuentra bajo los 34°C?



5. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

La escala de magnitudes aparentes (m) clasifica a las estrellas según la intensidad de su brillo estandarizado (I). Se calcula mediante la expresión:

$$m = \log_{100} \left(\frac{1}{I} \right)^5$$

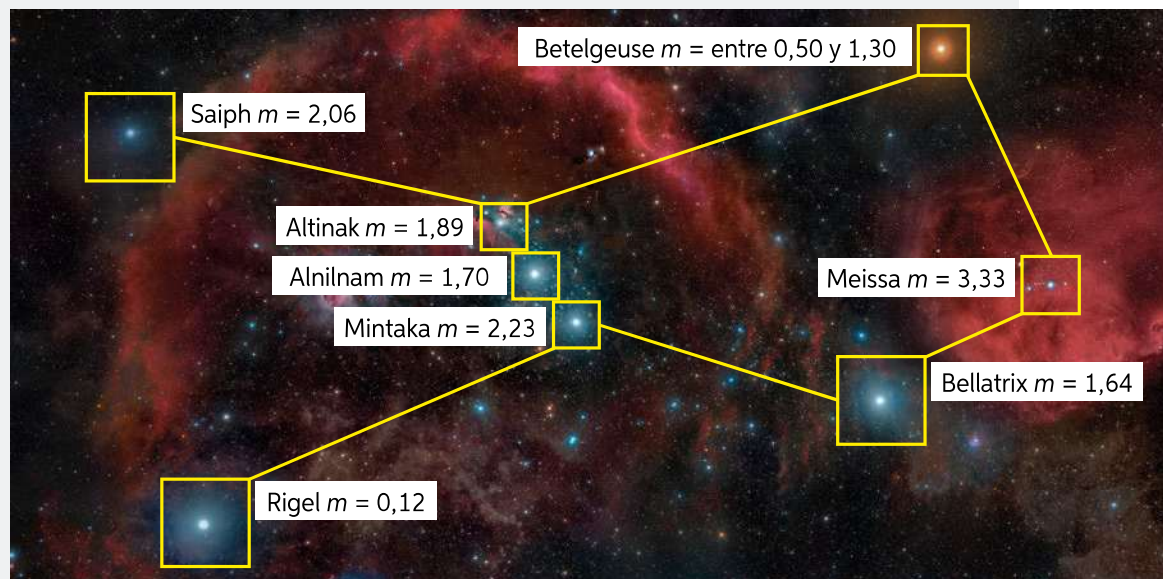
Para saber más.

gbit.cl/T21M2MP036A



Las estrellas que se ven más brillantes son aquellas que tienen menor valor.

Las magnitudes aparentes de las estrellas principales de la constelación de Orión son:



- ¿Cuál es la estrella de la constelación de Orión que se ve más brillante en el cielo nocturno? ¿Cuál es la menos brillante?
- Simplifica y transforma la expresión utilizando propiedades para obtener una equivalente con logaritmo de base 10.
- La estrella Ácrux de la constelación de la Cruz del Sur tiene una intensidad de brillo estandarizada de 0,5. ¿Cuál es la magnitud aparente de Ácrux? ¿Es más o menos brillante que Rigel?, ¿por qué?
- Determina la intensidad del brillo de las estrellas de Orión.
- ¿Cuánto varía la intensidad del brillo de Betelgeuse?
- La escala moderna incluye cuerpos celestes como la Luna y el Sol con una magnitud aparente de $-12,6$ y $-26,8$ respectivamente. ¿Cuántas veces más intenso es el brillo del Sol que el de la Luna?

Para concluir

- ¿En qué otras situaciones cotidianas podrías aplicar logaritmos? Investiga.
- ¿Es correcto decir que $\log(a) + \log(b) = \log(a + b)$? Argumenta tu respuesta con un ejemplo o contraejemplo.



25 a 27

- Explica con tus palabras la relación entre potencias de exponente racional y raíces.
- Explica con tus palabras la relación entre potencias de exponente racional y logaritmos.
- Expresa cada potencia en forma de logaritmo.

a. $3^4 = 81$	c. $5^{-3} = \frac{1}{125}$	e. $\left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1000}{27}$
b. $2^{-6} = \frac{1}{64}$	d. $\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}$	f. $\left(\frac{5}{4}\right)^{-4} = \frac{256}{625}$
- Expresa como potencias los siguientes logaritmos.

a. $\log_8 512 = 3$	c. $\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16} = -4$
b. $\log_7 \frac{1}{343} = -3$	d. $\log_{\frac{5}{6}} \frac{25}{36} = 2$
- Calcula el valor de x en cada caso para que se cumplan las siguientes igualdades.

a. $\log_x 729 = 6$	d. $\log_5 x = 6$	g. $\log_{81} 3 = x$
b. $\log_x 4096 = 4$	e. $\log_{64} x = \frac{1}{4}$	h. $\log_{\frac{1}{81}} 3 = x$
c. $\log_x 4 = \frac{1}{2}$	f. $\log_{\frac{512}{216}} x = \frac{1}{3}$	i. $\log_{\frac{1}{625}} 5 = x$
- Resuelve las siguientes operaciones aplicando las propiedades de logaritmos.

a. $2\log_4 64 + \frac{1}{3}\log_3 27 - \sqrt{\log_5 125}$	c. $\frac{1}{3}\log 10 + \frac{2}{3}\log 10 - \log 10 + \sqrt{\log 10}$
b. $4\log_3 9 + \frac{1}{3}\log_{16} 8 - \sqrt{\log_2 32}$	d. $\frac{\sqrt{3\log 100}}{9 + \log_2 8} : \frac{\log_6 3 + \log_6 2}{\log_{\frac{1}{2}} 4}$
- Para calcular el pH de una solución química se utiliza la fórmula $pH = -\log[H^+]$. En ella, H^+ es la concentración de iones de hidrógeno presentes en la solución. ¿Cuál es el pH de una solución que tiene una concentración de $[H^+]$ igual a $9,5 \cdot 10^{-12}$?
- Para determinar el diámetro d de un asteroide (en km), los astrónomos utilizan la expresión $\log(d) = 3,7 - 0,2 \cdot g$. En ella, g corresponde su magnitud absoluta.
 - Determina el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 30.
 - Calcula el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 20.
 - ¿Cuál es la magnitud absoluta de un asteroide si su diámetro mide 5,8 km?

Reflexiono

- ¿Cuál crees que es la utilidad de las escalas logarítmicas en contextos científicos?
- ¿Cómo facilitaron tus cálculos las distintas propiedades de logaritmos?
- ¿Comprendiste completamente la relación entre las propiedades de logaritmos y las de potencias enésimas? ¿Qué podrías mejorar?



28 a 29

¿Qué aprendí?



Evalúa los conocimientos adquiridos a lo largo de la Unidad realizando las siguientes actividades.

Responde a partir de la imagen.

1. ¿Cómo justificas la aparente contradicción presentada en la imagen?
2. Dibuja un cuadrado de lado 2 cm. Luego, responde las siguientes preguntas:
 - a. ¿A qué conjunto pertenece el valor de la diagonal de este cuadrado?
 - b. ¿Cuál es el largo aproximado de su diagonal? Estima mediante cuadrados perfectos.
3. Repite la experiencia para un cuadrado de lado 4, 8 y 10 cm. En caso de que se repitan los tipos de resultados, explica por qué ocurre eso.

Resuelve.

4. Indica si los siguientes números son racionales o irracionales. En caso de ser racionales, escríbelos como una fracción.
 - a. $\sqrt{2} + \sqrt{4}$
 - b. $\sqrt[3]{25 + \sqrt{4}}$
 - c. $\sqrt[3]{-5}$
 - d. $\sqrt{\frac{162}{49}}$
5. Construye en tu cuaderno una recta numérica y ubica los siguientes números en ella.
 - a. $\sqrt{17}$
 - b. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
6. Aproxima por redondeo a la centésima el valor de $\sqrt{30}$. Luego, determina el error de aproximación.

- Imagina que dibujas con exactitud un cuadrado de lado 1 metro en la arena. Luego, con la misma exactitud, cortas un trozo de cuerda del mismo largo que la diagonal de ese cuadrado. Así tendrás en tus manos una cuerda de largo $\sqrt{2}$ metros.
- El número $\sqrt{2}$ es irracional. Por lo tanto, no puede escribirse completamente y, sin embargo, lo estarías sosteniendo en tu mano.

8. Determina la veracidad de cada afirmación. Justifica tu respuesta.

- a. La base de un logaritmo puede ser cualquier número real positivo.
- b. $\log_{-5} 625$ existe y es igual a 4.
- c. El logaritmo cuyo argumento es la base de dicho logaritmo es siempre igual a 1.
- d. $\log_{0,5} 8 = -3$ expresado en forma de potencia es $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 8$

9. Calcula el valor de las siguientes expresiones (Considera $\log(2) = 0,3$, $\log(3) = 0,47$, $\log(5) = 0,7$ y $\log(7) = 0,85$)

- a. $-\log(14) - 5 \log(21) + \log(18)$
- b. $3 \log(4) + \log(245) - \log(144)$

10. Resuelve los siguientes problemas:

- a. El patio de un colegio, de forma rectangular, tiene 450 m^2 de superficie. ¿Cuánto mide su lado más corto si el patio está formado por dos cuadrados iguales?
- b. Calcula el volumen de un recipiente cúbico tal que para llenarlo con leche se gastaron \$159 720. Se sabe que el litro de leche cuesta \$15.
- c. $\log(P) = \frac{20 + t \cdot \log(2)}{10}$ es la expresión que relaciona la población P de insectos en una bodega transcurridas t horas en que está cerrada.
¿Cuántos insectos había en el instante en que se cerró?
¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que se cuadruple la población?

7. Reduce las siguientes expresiones utilizando descomposiciones y propiedades de raíces y racionales.

- a. $\frac{9}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
- b. $\left(\sqrt{\frac{14}{3}}\right) : \left(\sqrt{\frac{7}{9}}\right)$
- c. $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$
- d. $\sqrt[4]{\frac{3}{7}}$
- e. $\left(\sqrt[21]{\frac{12}{5}}\right)^{14}$
- f. $\sqrt{3} + \sqrt{27} - 2\sqrt{75}$

Reflexiono

- ¿Qué actividad te costó más realizar? ¿Qué contenidos están implicados?
- ¿Qué estrategias utilizaste para resolver los problemas?
- ¿De qué forma te aportaron al desarrollo de la evaluación tus compañeros?



Glaciar Perito Moreno. Santa Cruz, Argentina.
Patrimonio de la Humanidad.

Unidad

2 Álgebra y funciones

En esta Unidad aprenderás sobre ecuación y función cuadrática, sus propiedades, representación gráfica y aplicaciones en la vida cotidiana. Además, comprenderás el concepto de función inversa y cambio porcentual.

1. ¿Por qué crees que el glaciar Perito Moreno es el más visitado? Comenta con tu curso.
2. ¿Qué otros efectos tiene el calentamiento global? Investiga y comenta.
3. ¿Es un efecto reversible el cambio climático? ¿Qué podemos hacer para evitar sus efectos?